درس : الجداء المتجهي

I. توجيه الفضاء – ثلاثي الأوجه – الأساس و المعلم الموجهان:

01. ثلاثي الأوجه : Trièdre

1. تعريف:

$[OI)$ و $[OJ)$ و $[OK)$ ثلاثة أنصاف مستقيمات غير مستوائية من الفضاء تكون في هذا الترتيب (الترتيب مهم) ثلاثي أوجه يرمز له باختصار (OI,OJ,OK) أما أنصاف المستقيمات تسمى أحرفه. ($[OI)$ حرف لثلاثي الأوجه).

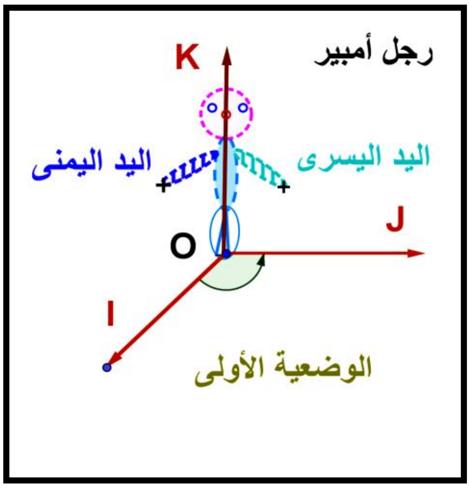
02. رجل أمبير:

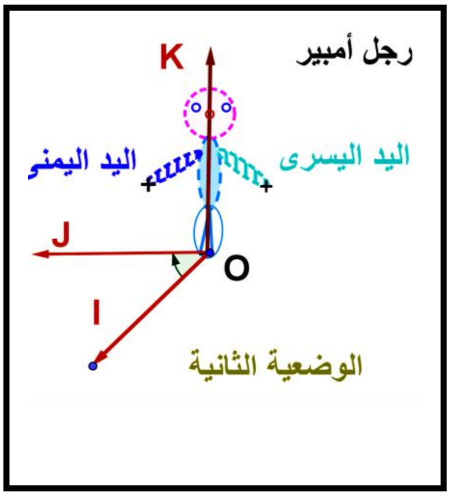
1. تقديم:

(OI,OJ,OK) ثلاثي أوجه ؛ نفترض شخص خيالي حيث : قدماه في النقطة O ومحمول على الحرف الثالث $[OK)$.

- وينظر إلى الحرف الأول $[OI)$.
- نهتم له يده اليسرى توافق منحى الحرف الثاني $[OJ)$.
- هذا الشخص يسمى رجل أمبير Bonhomme d'Ampère
- هناك وضعيتين للحرف $[OJ)$. (أنظر الوضعية رقم 1 ثم رقم 2)

Gravure de 1825 par Ambroise Tardieu.	
Données clés	
Naissance	20 janvier 1775 Lyon (France)
Décès	10 juin 1836 (à 61 ans) Marseille (France)
Nationalité	Française
Champs	Mathématiques, physique
Institutions	École polytechnique Collège de France
Renommé pour	Théorème d'Ampère
Signature	





03. الأساس و المعلم الموجهان:

1. مفردات:

- الوضعية التي يكون رجل أمبير محمول على الحرف $[OK)$ و قدماه في O و ينظر إلى الحرف $[OI)$ و الحرف $[OJ)$ على يساره نسمى ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر أو موجب (هذه الوضعية التي تهمنا في هذا الدرس)
- الوضع الأخر لثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) غير مباشر أو سالب
- $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم في الفضاء نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ إذن ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير مستوائية) المثلوث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء .
  - الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر .
  - في هذه الحالة المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يسمى معلم مباشر و نقول أن الفضاء موجه توجيها مباشرا (أو موجبا)

II. الجداء المتجهي لمتجهتين من الفضاء – تأويل منظمة:

01. تعريف هندسي للجداء المتجهي :

درس : الجداء المتجهي

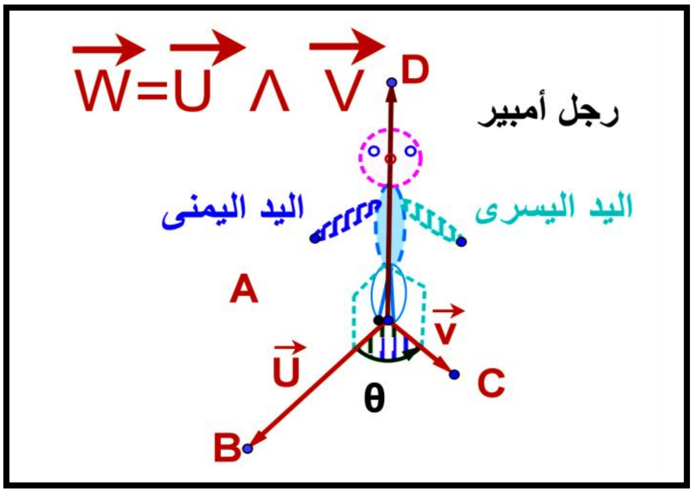
1. تعريف :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ متجهتين من الفضاء الموجه.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب (أي الترتيب مهم) هو المتجهة $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ و التي نرمز لها ب: $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ التي تحقق ما يلي.

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن: $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ تحقق
  - $\vec{w}$ متعامدة مع كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أي $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$)
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر . ($(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ أساس مباشر أو (AB,AC,AD) ثلاثي أوجه مباشر) .
  - $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس للزاوية الهندسية BAC .

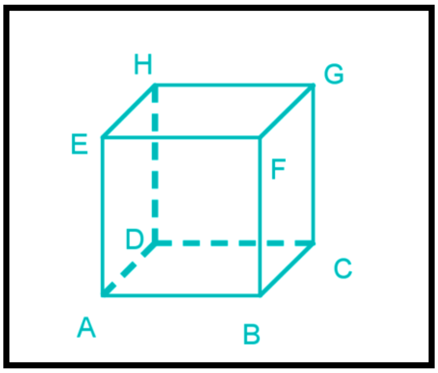
2. مثال 1 :



3. مثال 2 :

نضع : $\|\vec{u}\|=2$ و $\|\vec{v}\|=5$ و $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{6}$ أحسب : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

4. مثال 3 :



نعتبر المكعب : $ABCDEFGH$ حيث:

أ- $AB=1$. أوجد: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ ثم $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

ب- $AB=2$. أوجد: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ ثم $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

جواب:

أ- نجد :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ (لأنهما مستقيمتان) . $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=1\times1\times\overrightarrow{AE}$

ب- نجد :

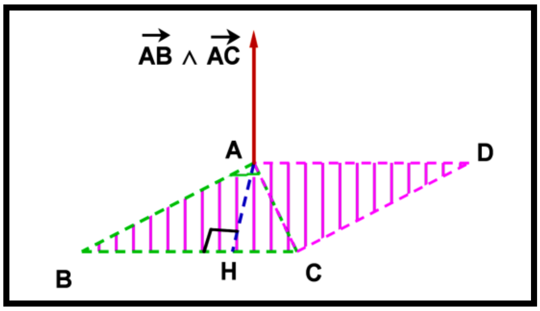
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ (لأنهما مستقيمتان) . $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=2\times2\times\overrightarrow{AE}$

5. نتائج:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء ، لدينا:

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ و $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ و $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين و متعامدتين $(\vec{u}\perp\vec{v})$ المثلوث: $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس متعامد مباشر.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين و متعامدتين $(\vec{u}\perp\vec{v})$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ المثلوث: $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس متعامد ممنظم مباشر.
- المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين الغير المستقيمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أي $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$) فإن المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منظمية على المستوى $\mathcal{P}$ ومنه: $\left(\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})=\mathcal{P}(A,\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v})\right)$.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان من الفضاء يكافئ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

02. تأويل منظم الجداء المتجهي لمتجهتين :



1. خاصية:

مساحة مثلث ABC هي $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

مساحة متوازي الأضلاع هي: $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

03. تخالفية و خطانية الجداء المتجهي في الفضاء:

1. خاصية:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k من $\mathbb{R}$ لدينا:

التخالفية (Antisymétrie)

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

خطانية: Bilinéarité

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \\ \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \left(k\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \end{cases}$$

III. إحداثيات الجداء المتجهي لمتجهتين بالنسبة لأساس م.م.م. مباشر.

1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى أساس م. م. مباشر $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء. لدينا:

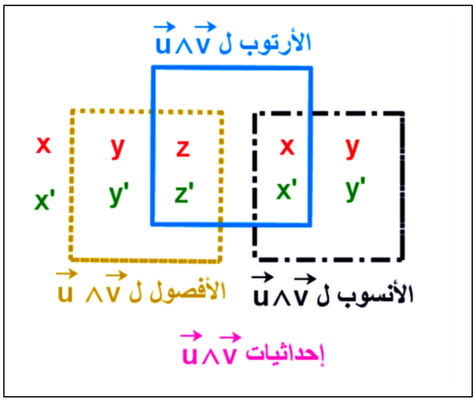
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}$$

2. مثال: تحقق بأن: $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

3. تقنية إيجاد إحداثيات $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

نستعمل الوضعية التالية :



IV. مسافة نقطة عن مستقيم في الفضاء:

1. خاصية:

$D(A,\vec{u})$ مستقيم المار من النقطة A من الفضاء و الموجه بمتجهة $\vec{u}$ (غير منعدمة) ، M نقطة من الفضاء؛ مسافة النقطة M عن المستقيم $D(A,\vec{u})$ هي: $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

2. مثال:

أحسب مسافة النقطة $M(1,3,0)$ عن المستقيم (D) حيث:

أ - $(D):\begin{cases}x=2t\\ y=3-t\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=-1+t\end{cases}$

ب - $(D):\dfrac{x+1}{3}=y=\dfrac{1-z}{2}$

جواب:

أ - $D\left(A(0,3,-1),\vec{u}(2,-1,1)\right)$ إذن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ و $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1-0\\3-3\\0+1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ومنه: $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{3}$

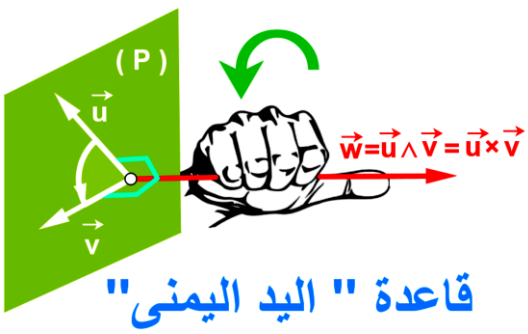
إذن : $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب- $D\left(A(-1,0,1),\vec{u}(3,1,-2)\right)$ إذن $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ و $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1+1\\3-0\\0-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ إذن : $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{75}$.

وبالتالي: $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{1050}}{14}$

V. إضافات تهم الجداء المتجهي :

01. الجداء المتجهي باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "



قاعدة " اليد اليمنى "
règle de " la main droite "

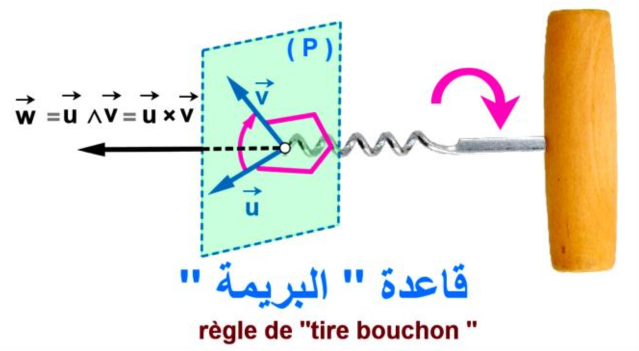
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (غير مستقيميتين) في هذا الترتيب هي : المتجهي $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\times\vec{v}$ العمودية على المستوى (P) الموجه ب $\vec{u}$ و $\vec{v}$

حيث اتجاه $\vec{w}$ محددة باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "

- نغلق اليد اليمنى حيث إغلاق الأصابع يكون تبعا للاتجاه الزاوية من $\vec{u}$ إلى $\vec{v}$ (مع أخذ أصغر زاوية من $\vec{u}$ إلى $\vec{v}$) (أنظر الشكل)
- ثم نضع حافة الجنبية لهذه اليد المغلقة (التي ليس فيه الأصبع المسمى الإبهام) على المستوى (P) . (أنظر الشكل)
- اتجاه $\vec{w}$ (أو أيضا $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\times\vec{v}$) هو اتجاه الأصبع المسمى الإبهام . (أنظر الشكل)

02. الجداء المتجهي باستعمال " بريمة إزالة سدادة القنينة " règle ≪ de tire bouchon ≫

بريمة أو بزال (آلة لولبية لنزع سدادة القنينة)



- نضع رأس البريمة في نقطة بداية انطلاق المتجهتين و بشكل عمودي على المستوى (P) الموجه ب $\vec{u}$ إلى $\vec{v}$. (أنظر الشكل)
- نقوم بعملية دوران للبريمة تبعا للاتجاه الزاوية من $\vec{u}$ إلى $\vec{v}$ (مع أخذ أصغر زاوية من $\vec{u}$ إلى $\vec{v}$) (أنظر الشكل)
- اتجاه $\vec{w}$ (أو أيضا $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$) هو : اتجاه تقدم خروج رأس البريمة من الجانب الأخر للمستوى (P) . (أنظر الشكل)

03. استعمال مجال مغناطيسي